

「軌跡問題」的課堂教學研究簡介

福建中學任教數學科的老師多年來發現學生在學習附加數課程中的「軌跡方程」時困難較大。以往在教學中大都是以老師為中心的單向講解，學生被動聽課，於是學生難於理解概念，流於機械模仿例題。教師意識到須改變教學法，在專業發展日的討論中提出，應發揮學生主體作用，讓學生有機會多思考、多動手，積極投入課堂學習。所以高中組數學老師決定採用張志紅提供的「五步教學法」，以進行一次教學行動研究。「五步教學法」是“鋪墊引入、閱讀討論、釋疑探究、檢測反饋、總結評估”，此課堂教學研究的目的是期望找到提高教學效能的方法。教師進行大量討論再實踐教學。一名教師在中四 S₁ 班實踐教學，科組教師觀課，每上完二節課後就集體反思，修定教案及教學技巧；再由另一名老師在中四 S₂ 班教同一內容，觀課後又再檢討，最後完成全部教學流程。用五步教學法教學探究是一個以學生的發展為本原則的較好實踐。分組討論讓學生思考平時只會從教師講授中接受的知識。研究得出「軌跡的問題」運用「五步教學法」進行教學是比傳統教師單向授課好，學生能積極投入學習，多思考、動手、交流，更能理解及熟練課程內容。而教師得到很大啟發，更有信心教好困難的課題。

「軌跡問題」的課堂教學研究

介紹

一.背景

本校任教高中數學科的老師多年來發現中四學生在學習課程中的「軌跡方程」時，困難較大。事實上此數學課題是用數形結合的思想方法來學習，將幾何曲綫理解為動點運動的軌跡，而用代數中的變數來表示幾何中的動點，用方程來刻劃動點運動的軌跡。著重思考、推理分析，對學生來說難度較大。而以往教師在教學過程中大都是以老師為中心的單向講解，學生被動聽課，於是出現學生對問題理解不全面，或流於機械模仿例題。教師意識到須改變教學法，在集體備課中提出應該讓學生一步步深入的學習，發揮學生主體作用，讓學生有機會多思考、多動手，積極投入課堂學習。所以我們決定透過採用張志紅提供的「五步教學法」，以進行一次教學行動研究。「五步教學法」是“鋪墊引入、閱讀討論、釋疑探究、檢測反饋、總結評估”，此課堂教學研究的目的是期望找到提高教學效能的方法。於是科組老師就教學目標、前測、教學流程等進行大量討論再在中四的二個班級中進行實踐教學。

二、「五步教學法」的教案設計理論依據

教案的設計理念，包括目標導向原則、學生發展為本原則及資訊回饋原則。

2.1 目標導向原則

教學目標可分為三個層面：知識、技能及情感目標。知識目標為了解軌跡的概念及描繪軌跡和求某些簡單的軌跡方程。技能目標為使學生懂得利用解析幾何中的公式求不同類型的軌跡方程，懂得將數形結合。情感目標有二，一是讓學生了解到數學的研究方向的轉變：從古代以幾何為主導的數學轉變為以代數和分析為主導的數學，欣賞數學史上的一次飛躍；另一目標則是訓練學生的持久力，培養學生向難題挑戰的精神。

2.2 以學生的發展為本的原則

學生將分組討論學習，提供機會讓學生探索發現、得出結論；教師成為組織、合作、指導及釋疑解惑者，引導學生一步步深入學習。

2.3 資訊回饋原則

在進行分組討論前，老師需要幫助學生複習解析幾何的公式(學生之前已學習過這些公式)，有了充份的準備，利用小組討論，獲得更多回報，才能在交流中互相啓發。而加強師生之間的交流及反饋使教師可以更好調控教學進程。

教學研究方法及設計

一、參與者

參與本教研活動者為兩班中四理科(4S1及4S2)班學生，分別有44及45名學生，而進行施教者為兩位數學科教師。

二、教研日期

兩位老師分別於2005年(?) 5月9日至5月24日透過8課節對兩班進行施教。

三、教學目標

教學重點是介紹軌跡的概念及其在坐標平面上的表達方法，並認識有關求軌跡方程的一般程序。求軌跡方程時難度由低至高，引導學生了解求軌跡方程的各種不同題型，由此希望提高學生的邏輯推理能力及進一步理解解析幾何的原理。

四、教研程序

4.1 課前準備

教學前對兩班學生進行前測，以了解學生存在的問題，前測之結果是學生對本課題所需的解析幾何公式未能理解透徹或未能純熟應用；邏輯推理能力稍遜；未能理解解析幾何的原理。因此教師作了一些準備：事先要求學生清楚理解及熟練公式。而教師本身準備工作紙、預測學生將會遇到的疑問及準備適切的提問，引領學生了解課題。

4.2 設計教學流程

第一步：鋪墊引入---動機誘發、診斷練習

首先，以日常事例(如星球運行的路綫、炮彈發射後的路徑等)引出軌跡的概念及研究的必要性。說明物體在一定條件下運動所經歷的路程或位置稱為該物體的軌跡。接著，老師引導學生複習相關的知識，包括距離、分點、多邊形面積、斜率、兩直線的夾角、直線方程、點到直線距離、直線族方程、圓的標準方程及一般方程等公式。

第二步：閱讀討論---學生分組、閱讀思考、探究規律

按照班級學生的人數，將全班同學分成若干組，每組宜四至五人，每組均應有能力較強及較弱的學生，並以表達力、溝通能力較強的學生為小組長(教師事先訓練小組長)。此階段讓學生自行閱讀、思考問題，遇到不明白時讓他們互相討論。教師聽取討論、出示思考題及解答各組疑問。指示學生閱讀書本的探索題(參考課本第107頁探索題)，討論後回答課本的問題。在這個過程中，學生認真的進行粗讀和細讀，教師出示思考提綱，學生閱讀思考，在小組長的組織下，對不懂的問題進行討論；小組長做好筆記，並準備回答老師的提問。在此過程中，教師穿梭在同學之間，解答學生的疑問，必要時介入討論及激發

組與組之間的討論。完成討論後，教師引導學生回答思考題。首先期望學生明白動點運動的軌跡可以用幾何作圖來表示。更重要讓學生明白動點運動的軌跡可以用方程表示(形數的結合)，同時希望學生探究到求軌跡方程的一般步驟：

- i) 設動點或軌跡上任意一點的坐標為 (x, y) 。
- ii) 根據軌跡上的點所滿足的條件列出等式，從而得到一個關於 x 和 y 的方程。
- iii) 經整理化簡便可得到所求的軌跡方程。

第三步：釋疑探究---強調重點、探究變化

當學生已掌握求軌跡方程的基本步驟，則繼續發展基本的不同題型的訓練，當中教師針對學生困難，提問精講，更重要是通過各組發現去解決問題。探討題目為課本的第十一章例 4 及例 5。(仍以小組討論為主，教師設計工作紙、提問、總結。)此處的目標有三：

- i) 讓學生見識不同基本題型。
- ii) 強調以不同公式解題的方法。
- iii) 以幾何條件，運用代數方法，得出代數方程。

第四步：檢測反饋---形成訓練

進行不同題型的訓練，主導思想是一樣，但不同條件下使用不同解析幾何公式。此時可吩咐學生做課本練習的題目。題目由淺至深佈置。學生做題時除模彷例題，更應明白原則、掌握公式、靈活多變，以真正了解授課內容。課堂結束前，教師適量佈置家課，待將家課批改完畢後，教師再在堂上作出評價反饋，指出學生於家課中的弱項。若仍有學生遇到難點，未能掌握，則宜於課後進行個別輔導，希望每個學生都有收穫，有不同程度的成功體驗。

第五步：總結評估 ---深化目標、認真總結

當學生能處理一般的題型後，可做較深入的題目，包括綜合性的問題，學生應在完全了解一個問題後才開始研究另一個問題。老師要求每小組嘗試自己創作一份測驗卷題目，卷內要有不同題型的試題，讓學生總結題目的形式。每組完成後，教師將各組的試卷收集、整理及進行評估，將結果與整體學生分享。學生能創作出令人驚喜的題目，那麼師生均能得益。

4.3 教學實踐

第一、二步共用四節課，後三步內容也用四節課。由一名教師在 4S₁ 班實踐教學，科組教師觀課，每上完二節課後就集體檢討反思，指出優點及提出改善修定教案及教學技巧；此之後由另一名老師在 4S₂ 班教同一內容，而科組教師觀課後又再檢討，繼續提出改進方法，最後在 4S₁ 班完成全部預定教學流程。完成之後科組老師就整個教學過程作對比評估總結。學生方面召開座談會及作問卷調查，了解反映及成效。

教學研究評估

教師在完成整個教學流程之後，邀請部份學生座談（見附件一），並進行問卷調查（見附件二）。整體來說，約四分之三的學生認同用「五步教學法」就教「軌跡問題」比平時老師單向講授好，加深他們對主題內容認識，有更多機會思考、表達，同學間能交流討論結果，大部份學生能全情投入課堂學習，所以他們對「軌跡問題」的8堂課學習是滿意的。但對少數基礎差、被動、不投入的學生成效就較差。學生認為較深奧的課題應該用分組討論，而較容易的課題由老師講解，師生互動，較節省時間。

教學研究結果

一、學生方面

1.1 學生敢於提問，樂於思考

在教學過程中，學生需要進行討論、發現，大部份學生都樂於參與，學生亦能自己發現規律及問題。

在分組討論中，學生遇到不明白的地方，可提出來向同學請教，同學間能互相提問，能力較好的學生負責解答。這不只對提問者有幫助，解答者透過自己的手、口解釋答案，亦可加深他們對課題的了解，相得益彰。有一位觀課的老師訪問一個學生，究竟老師的講解清晰，還是同學的講解清晰。該生認為他更明白同學的講解。這並不一定代表老師的授課不清晰，而是反映有時學生更明白學生的想法，能用他們的語言溝通。另外，當學生向老師發問時，老師解答一次後，如果學生仍不明白，也可能不想影響其他學生的進度，而放棄進一步提問。但在同學間，便少了這份擔憂，故肯放膽發問，尋根究底，這樣便能對所學的課題，有更透徹的理解。除了組員間的探究外，組與組之間亦能產生互動。舉例來說，當某組的同學發現了有趣的問題，或找到了很不錯的解題方法，教師便邀請他們在全班同學面前講解，這樣其他組也能了解到他們的想法，促進了交流。

1.2 學生能自主學習

在分組討論時，學生都專注地研究工作紙上的題目，憑藉老師留下的線索去尋找答案。同學們大部份都覺得這樣做能加強他們對課題的了解，套用學生的一句話：「自己想出來的東西永遠都不會忘記。」平時，老師是把課題的來龍去脈在大家面前解釋一遍，出於對老師的尊敬，或認為老師很少會犯錯，學生大半都會接受老師的教學。但在五步教學法之下，學生需認真思想每一細節，自己先回答每一問題，故對課題會更加了解，而不只是被動接受。

二、教師方面

參予研究的教師在教學方法、策略、技巧有較大的啓發。有位老師說，以往就教此課題時，因學生難以接受，就鴨過水背草草收場，現在發現只要讓學生積極投入課堂學習，老師做好啓發、引導、師生合作，學生是可以學好的，以後再教此課題他就有信心讓學生學好。老師也進一步看到充分備課以及同儕協作的的重要性。

討論及總結

在教研過程中，我們發現有以下方面可以作出改進。

一、學生方面

1.1 注意學生過份投入、忽略傾聽

當老師要求學生停止討論，由老師引導著進行小結，或由個別組別匯報時，部份學生仍埋首他們的討論，或不留意他人的發言，而是在心中繼續思考自己的問題。這種情況突顯了個別同學們，對解決問題的鏗而不捨的精神，但過份投入導致學生未能聽到老師的指引或同學的見解，亦有礙學習。老師要特別強調此點，解釋聽其他人意見的重要性，情況才能有所改善。

1.2 注意分組學生各自為政、怯於分享

有個別組別，組員間不願開口傾談，害怕自己說錯，或遇到疑問，不敢向其他組員提出。這便失去了分組討論之效，老師需多提醒、促進，組員間的溝通就多了。當大家發現自己心中的疑問與其他人大同小異時，便多了份自信，不認為會被看不起，交流也增多了。

1.3 分組的原則影響討論質素

教師宜根據學生的數學能力進行分組。每組都應有數學能力較強及較弱的學生，較強的學生可做小組長，帶領、幫助較弱的學生。這次分組時，礙於小部份學生未與整體同學熟絡，不願與較強的學生一組，導致該組學生較弱，討論時未能有效發現規律。此類情況，老師應多加注意，儘量避免。其他組別，因都有些數學能力較好的學生，起到帶頭作用，故效果較好。

二、老師方面

2.1 課前準備 課中引導 及時反饋

老師希望在授課中讓同學有更大的得益，便需在課前有充份的準備，包括設計合適的工作紙，開始的問題難度較低、提示較多，往後的問題，變化加大、難度增加、提示亦較少。由選題到排版，老師要在上課前花不少精力，才能做出一份適合的工作紙。此外，老師要預測學生將會遇到什麼樣的疑問，事先有了準備，在上課時便能在適當時機給予學生最佳的引導。例如，應如何引導學生

理解某道問題的題意，在何時點出由平面幾何到解析幾何的好處，某道問題能否一題多解，能否將題目引申變化，變成一題多問等。以上幾點跟老師事前的備課、數學的觸覺、教學的經驗息息相關。教師宜終身學習，與時並進，汲取新的知識。而此教學法要求學生腦力激盪、探索規律。當學生有了發現，需要將所得資訊與老師及其他組分享，故教師應重視控制資訊交流的技巧。

2.2 時間控制

教師宜對分組討論的時間拿捏得準。如果老師花較多的時間長引導個別組別的討論，其他學生得不到指引、或遇到問題未能突破，變得沒有了方向，那麼班級的氣氛就變得鬆散。故教師應儘量照顧各組的需要，討論時間亦宜緊湊，遇到較難或有趣的問題，可要求學生將問題跟全班同學分享，然後一起思考答案。

2.3 適當運用資訊科技

老師發現把學生討論的結果以實物投影機投放，令教學變得流暢。軌跡問題涉及動點在坐標平面上的運動。教師利用軟件製作教材，用電腦及投影機播放教材，讓學生體會到動點在平面上的路徑。這些做法都幫助提高資訊的回饋。

三、整體效果

此次用五步教學法教學探究是一個以學生的發展為本原則的較好實踐。分組討論讓學生思考平時只會從教師講授中接受的知識，令學生有機會問平時不敢問的問題，這對成績一般的學生幫助最大。只是對於成績差、無甚學習動機的學生，在分組討論時，如不主動投入，成了得益最少的一群，例如我們發覺由於4S₁學生水平稍好，所以效果較4S₂略好。

在知識層面，從學生的工作紙及家課中，可看出學生大致能掌握求軌跡方程的一般步驟。

技能目標要求學生懂得利用以往所學的幾何公式求軌跡方程，由於學生的基礎參差，故學生在解題時的表現亦參差。大體而言，學生明白求軌跡方程的方向，但在根據題目的條件列出相關等式時，部份學生未能正確寫出公式。

在情感目標方面，以平面幾何及解析幾何的形式設計同一道題目，讓學生發現當我們引入坐標系，便可以代數方法解決幾何問題。學生能欣賞到解析幾何的好處。所以科組教師一致同意「軌跡的問題」運用「五步教學法」進行教學是比傳統教師單向授課好，學生能積極投入教學，多思考，多動手，多交流，更能理解及熟練課程內容。而教師角色雖變，但事前備課要更充分，提問的技巧及課程上敏銳的觀察都十分重要，老師反思中的不足之處應是日後的借鑒。

「五步教學法」在「軌跡問題」的教學試探

參考文獻：

1. 張志紅 (2005)。「新課標下的自學探究教學嘗試」 載於《福建中學教研文集》第二期 47-52 頁。
2. 蘇一方及黃鳴嬋 (2002) 。《文達附加數學第二冊(第四版)》 香港：香港文達出版社。
3. 張順燕 (2004) 。《數學的美與理》 北京：北京大學出版社。
4. 黃鳴嬋及蔡培元 (1998) 《文達中學數學第五冊》 香港：香港文達出版社。